

Θεωρητική μελέτη της χρήσης ράβδων σαν ιδιόφωνα μουσικά όργανα

Σπύρος Κουζούπης

Τμήμα Μηχανικών Μουσικής Τεχνολογίας & Ακουστικής
ΤΕΙ Κρήτης
skouzo@staff.teicrete.gr

ΠΕΡΙΛΗΨΗ

Με την προοπτική της εφαρμογής στα ιδιόφωνα μουσικά όργανα, όπως π.χ. μεταλλόφωνο, ξυλόφωνο, μαρίμπα, βιμπράφωνο, μελετώνται και αναλύονται διάφορες περιπτώσεις ράβδων κυρίως ως προς τις ιδιοσυχνότητες και τις ιδιομορφές που παρουσιάζουν. Οι ράβδοι μοντελοποιούνται με βάση το μοντέλο Euler-Bernoulli αλλά και το μοντέλο του Rayleigh, το οποίο λαμβάνει υπόψη την αδράνεια στρέψης. Για τη λύση του προβλήματος των ιδιοτιμών παρουσιάζεται μία προσεγγιστική αριθμητική μέθοδος που βασίζεται στα πολυώνυμα Chebyshev, ενώ η ακρίβεια της μεθόδου ελέγχεται συγκρίνοντας τις εξαγόμενες ιδιοτιμές με τις ιδιοτιμές που προκύπτουν από αναλυτικές σχέσεις, σε αρκετές περιπτώσεις που αυτό είναι εφικτό. Για τις τρεις πρώτες ιδιοσυχνότητες που μας ενδιαφέρουν από μουσικής πλευράς, η ακρίβεια της μεθόδου φτάνει μέχρι και τα 2 δεκαδικά ψηφία όταν οι όροι της δυναμοσειράς φτάνουν τους 10. Το ενδιαφέρον επικεντρώνεται στις σχέσεις των εγκάρσιων ιδιοσυχνοτήτων στην ελεύθερη-ελεύθερη ράβδο με σκοπό οι λόγοι της 2^{ης} και της 3^{ης} ιδιοσυχνότητας σε σχέση με την 1^η, να πλησιάζουν οποιουδήποτε λόγους μιας αρμονικής ακολουθίας. Στα πραγματικά ιδιόφωνα μουσικά όργανα, στα οποία το κούρδισμα γίνεται με πρακτικό τρόπο σμιλεύοντας τις ράβδους, οι λόγοι αυτοί έχουν σχέσεις 1:3:6, ή 1:3:8, ή 1:4:9.8. Εξετάζονται οι περιπτώσεις όπου η πυκνότητα και το μέτρο ελαστικότητας της ράβδου αλλάζει σύμφωνα με πολυώνυμα 2ου και 3ου βαθμού αντίστοιχα, ή αλλάζουν και οι δύο ομοιόμορφα σύμφωνα με ένα τριώνυμο, διατηρώντας συμμετρική ή μη συμμετρική μορφή σε σχέση με το κέντρο της ράβδου. Χρησιμοποιώντας σαν παραμέτρους τους συντελεστές των πολυωνύμων εξετάζουμε πως αλλάζουν οι λόγοι των συχνοτήτων του 2ου και του 3ου εγκάρσιου τρόπου σε σχέση με τον 1ο. Βρίσκεται ότι υπάρχουν περιπτώσεις όπου οι λόγοι λαμβάνουν ακέραιες τιμές, γεγονός που έχει πρακτική σημασία στην μουσική απόδοση μιας ράβδου.

***Theoretical approach on the use of beams
as musical idiophones***

ABSTRACT

With the prospect of applying the results to musical idiophones such as the keys of vibraphone, xylophone or marimba, several cases of functionally graded beams are investigated mainly with regard to the eigenfrequencies they present. The bars can be modeled using either the Euler-Bernoulli or the Rayleigh model. In order to solve the eigenvalue problem an approximate method based on the Chebyshev polynomials is presented. To validate the method several cases found in the literature of uniform, nonuniform and functionally graded beam boundary value problems that have exact solutions, were used as benchmarks. We assume that the density of the beam varies either according to a trinomial and the Young modulus according to a 6th degree polynomial or to a trinomial. By varying the polynomial coefficients we are seeking integer ratios of the 3rd and 2nd bending mode eigenfrequency with respect to the primary vibrational mode. In most commercial instruments the tuning is done empirically by sculpting an arch on the underside of the bar. This way the frequencies are tuned in most cases to ratios 1:3:6, or 1:3:8, or 1:4:9.8. By varying the polynomial coefficients one at a time while keeping the rest of them constant we plot the frequency ratios. With this process we can detect cases where both frequency ratios reach integer values which pertain to a musically useful bar.